GCR2

ENIG

ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015

LUNDI 30/03/2015

Durée : 2H00. ***Documents non autorisés.***

Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

N.B:Les GSM et Smartphones sont interdits.

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

I) Un dipôle court ($I(x_p)= I_o\left(1-\frac{2|x_p|}{l}\right)\vec{i}$ *pour* $|x_p| \le \frac{l}{2}$) est placé symétriquement autour de l'origine , tout au long de l'axe Ox. Sachant qu'on se place dans la région de champs lointain:

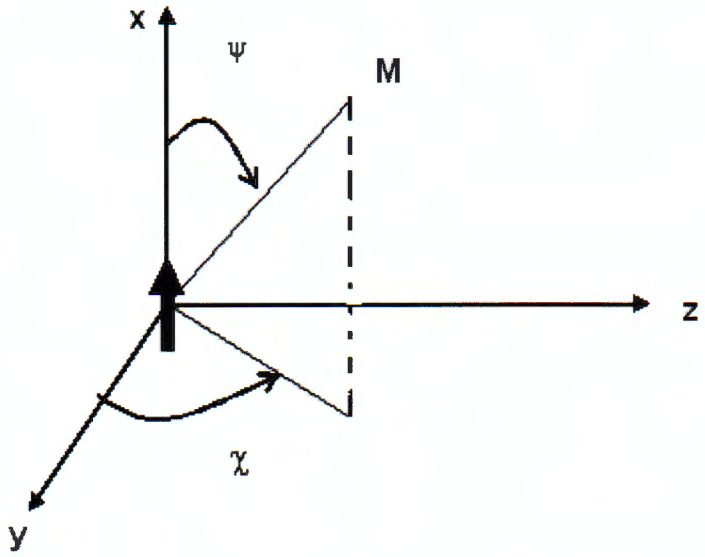
1°)a)Traiter d'abord le cas où le dipôle est placé symétriquement le long de l'axe Oz.($\vec{A}$ puis $\vec{E}$ puis $\vec{H}$)

b)Obtenir les champs E_ψ et H_χ en fonction des angles θ et φ des coordonnées sphériques usuelles.

2°)a)Donner l'expression de l'intensité de rayonnement.

b)Calculer la puissance rayonnée.

c)Obtenir la directivité.



II) Soit une spire rayonnante de surface S, parcourue par un courant $Ie^{-j\omega t}$(I est une constante) dont la dimension est négligeable devant la longueur d'onde . On se place dans la région de champ lointain:

1°) a) Obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

b) Obtenir le champ $\vec{H}(M)$.

2°) Trouver l'expression de la puissance moyenne rayonnée de la spire.

3°) a)Déduire l'expression de la résistance de rayonnement. Simplifier l'expression et la donner en fonction de la surface de la spire et de la longueur d'onde.

b)Comment peut-on augmenter la résistance de rayonnement ?

c)Comment calcule t-on la résistance ohmique de cette spire ?

4°)Soit une spire circulaire de longueur $0,25\lambda$ et dont le diamètre de la section du fil est égale à $0,0015\lambda$. Le fil est fait à partir d'un conducteur de conductivité $\sigma=3,95.10^{7}Sm^{-1}$. La fréquence de travail est de 2,4MHz et on donne $\mu_o=4\pi10^{7}F/m$

a)Quelle est la valeur de la résistance de rayonnement de la spire.

b)Quelle est la valeur de sa réactance.

c)Calculer sa résistance de dissipation.

d)Que vaut l'impédance d'entrée de cette antenne ?

e)Que vaut l'efficacité de rayonnement de cette antenne ?

III) Tracer, dans la feuille jointe avec le sujet d'examen , en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé, d'un réseau linéaire horizontal de 6 dipôles demi-onde horizontaux équidistants ($d=\lambda/2$), colinéaires, excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha=3\pi/2$.

IV)1°)Etablir l'expression de la résistance ohmique du dipôle idéal R_d .

2°)Calculer R_d sachant que la conductivité σ est égale à $3,610^{4}$ S/m , que le diamètre du dipôle est égal à 2,2 mm, la fréquence est de 150 Hz .

$\mu o=4\pi10^{-7}H/m$ $\ell = 1\,m$

Bon travail

FORMULAIRE DU MODULE ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$ $\quad \vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$ $\quad div\,\vec{D} = \rho$

$div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu\vec{H}$ $\quad \vec{J} = \sigma\vec{E}$

Puissance moyenne rayonnée:

$$P = \mathrm{Re}\left(\oiint \frac{1}{2}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}^{*}\right).\vec{dS}\right) ;$$

Potentiels :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A} \;; \vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A} ;$$

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0$ (jauge de Lorentz)

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}; \quad avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon ;$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source}\frac{I e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$$

Dipôle Idéal dans la région de champ lointain :

$$\vec{E} = j\omega\mu\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{H} = j\beta\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\varphi \;; \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi$$

Dipôle de dimension finie :

$$\vec{H} = j\beta\frac{\sin\theta}{\mu}.A_z\vec{u}_\varphi \;; \vec{E} = -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta$$

Limite de la région de champ proche : $r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi); \vec{u}_r\,x\,\vec{E} = \zeta\vec{H}$$

Champ normalisé : $F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Diagramme de puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2 \;; U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$$

Directivité : $D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega, D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

Gain : $G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Dipôle demi-onde :

$$I(z) = I_m\sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z|\right)\right] pour \quad |z| \le \frac{\lambda}{4}$$

champ normalisé : $F(\theta) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin(\theta)}$

Impédance d'antenne : $Z_A = R_r + R_d + jX_A$; $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$;

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

dipôle magnétique : $\vec{A} = j\beta S\mu\frac{I}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

spire circulaire : $L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$

pour $a << b$;b :rayon de la spire ; a : rayon du fil

Antenne à la réception :

$P_{max}(réçue) = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$; $Pmax = \left|\vec{S}\right|A_{emax}$;

A_{emax} :surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{emax}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{emax}$; $A_e = e_r A_{emax}$;

$G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS : $P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$

$EIRP = P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

RESEAUX LINEAIRES EQUIDISTANTS UNIFORMEMENT EXCITES :

Facteur de réseaux normalisé :

$$FR_n = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}; \psi = \beta d\cos\theta + \alpha$$

Champ du réseau :

E(réseau)=E(élément singulier)xFR

DS ANT 2014-2015

(1)

I) 1°) a) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{dipôle} \frac{I(z_p) e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz_p \vec{k}$

on prend $R \simeq r \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} I_0 \left(1 - \frac{2|z_p|}{l}\right) dz_p \vec{k}$

$\vec{A}(M) = \frac{2\mu_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} I_0 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2z_p}{l}\right) dz_p \vec{k}$

$u = 1 - \frac{2z_p}{l}$; $du = -\frac{2}{l} dz_p \Rightarrow dz_p = -\frac{l}{2} du$

$A(M) = \frac{\mu_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} I_0 \int_1^0 u(-)\frac{l}{2} du \vec{k} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_0^1 u\, du \vec{k}$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \vec{k} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \vec{k}$; $\vec{k} = \cos\theta \vec{u_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

RC $\Rightarrow \vec{E} = -j\omega A_\theta \vec{u_\theta} = j\omega A_z \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{E} \simeq j\omega \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r \beta} \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{H} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{\eta} = j\omega \frac{\mu_0 I_0}{\eta_0} \frac{l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\theta \vec{u_\varphi}$

b) $E_\varphi = j\omega \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\psi$

$H_\chi = j\beta \frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\psi$

ψ ? $\cos\psi = \vec{u_r} \cdot \vec{i} = (\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \vec{u_R}) \cdot \vec{i}$

$= (\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j}) \vec{i}$

$= \sin\theta \cos\varphi$; $\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi}$

$\sin\psi = \sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi}$

$$E_\varphi = j\omega\mu_0 \frac{I_0}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

$$H_\chi = j\frac{\beta I_0}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

2) a) $U(\theta,\varphi) = R_r [\;] r^2$

$$\vec{R} = \frac{1}{2} Re\; E_\varphi \vec{u}_\varphi \wedge H_\chi^* \vec{u}_\chi$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\chi)$ trièdre direct

$$\vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_\chi = \vec{u}_r$$

$$R_r = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0\beta |I_0|^2}{(8\pi r)^2} (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

b) Puissance rayonnée

$$P = \iint U\, d\Omega \qquad d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

Moyen.

$$P = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} \left[\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \right]$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = +1+1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

(3)

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta = -\int_1^{-1} (1-u^2)\, du$$

$$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2}\underbrace{\left[4\pi - \frac{4\pi}{3}\right]}_{8\pi/3} =$$

$$\boxed{P = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{48\pi}}$$

c) $D = \dfrac{4\pi U_{max}}{P}$, $U_{max} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2}$

$$D = 4\pi \times \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} \Big/ \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{48\pi} = \frac{48\pi}{2(8\pi)^2} \cdot 4\pi = \frac{1}{2}\frac{192}{64} = \frac{3}{2}$$

II) $\vec{A} = \beta S \mu \frac{I}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{E} = -j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi = -j\omega\beta S\mu \frac{I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\eta} = -\frac{\omega\mu\beta S}{\eta} \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{H} = -\frac{\beta^2 S I_0 e^{j\beta r}}{4\pi r} \sin\varphi e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\eta} \vec{u}_r = \frac{(\omega\beta\mu S)^2 |I_0|^2}{2\eta(4\pi r)^2} \sin^2\theta \vec{u}_\varphi$

$\frac{\omega\mu}{\eta} = \beta = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2 \sin^2\theta}{2(4\pi r)^2} \vec{u}_r$

$P = \iint \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{2(4\pi)^2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{2(4\pi)^2} \frac{4}{3} \times 2\pi$

$P = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{12\pi}$ comme $\eta = 120\pi$

$P = 10 (\beta^2 S |I_0|)^2$

3°) a) $R^r = \frac{e^r}{|I_0|^r} = 10\beta^4 S^2$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow R^r = 2\times 10 \times (2\pi)^4 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$

$$\boxed{R^r = 31171 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2}$$

b) on peut augmenter R^r en augmentant le nombre N de spires, dans ce cas on remplacera S par NS

c) $R_d = \frac{R_s L}{2\pi a}$ avec $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

L est le périmètre moyen de la spire et a est le rayon de la spire

σ : conductivité $\omega = 2\pi f$

4°) a) $R^r = 31171 \left(\pi \frac{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}{X^2}\right) =$ ~~0,2711 188,0818~~ Ω

(~~0,27 18~~ avec 31200)

b) $L = \mu b \left[\log \frac{8b}{a} - 1{,}75\right]$

$X = \omega L = 2\pi \frac{c}{\lambda} \times \mu \frac{L}{2\pi} \left[\log \frac{8L/2\pi}{a} - 1{,}75\right]$

$= 3.10^8 \times 4\pi 10^{-7} \times 0{,}25 \left[\log \frac{8\times 0{,}25}{2\pi \times 0{,}0015/2} - 1{,}75\right]$

$= 405{,}334\ \Omega$

$R_d = R_s \frac{L}{2\pi a} = 0,0260\,\Omega$

d) $Z_A = R_r + R_d + jX_A$

$Z_A = (0,7971 + j\,405,33)\,\Omega$

e) $e_r = \frac{R_r}{R_r + R_d} = 96,74\,\%$

IV

$R_d = \rho \frac{\ell}{S}$

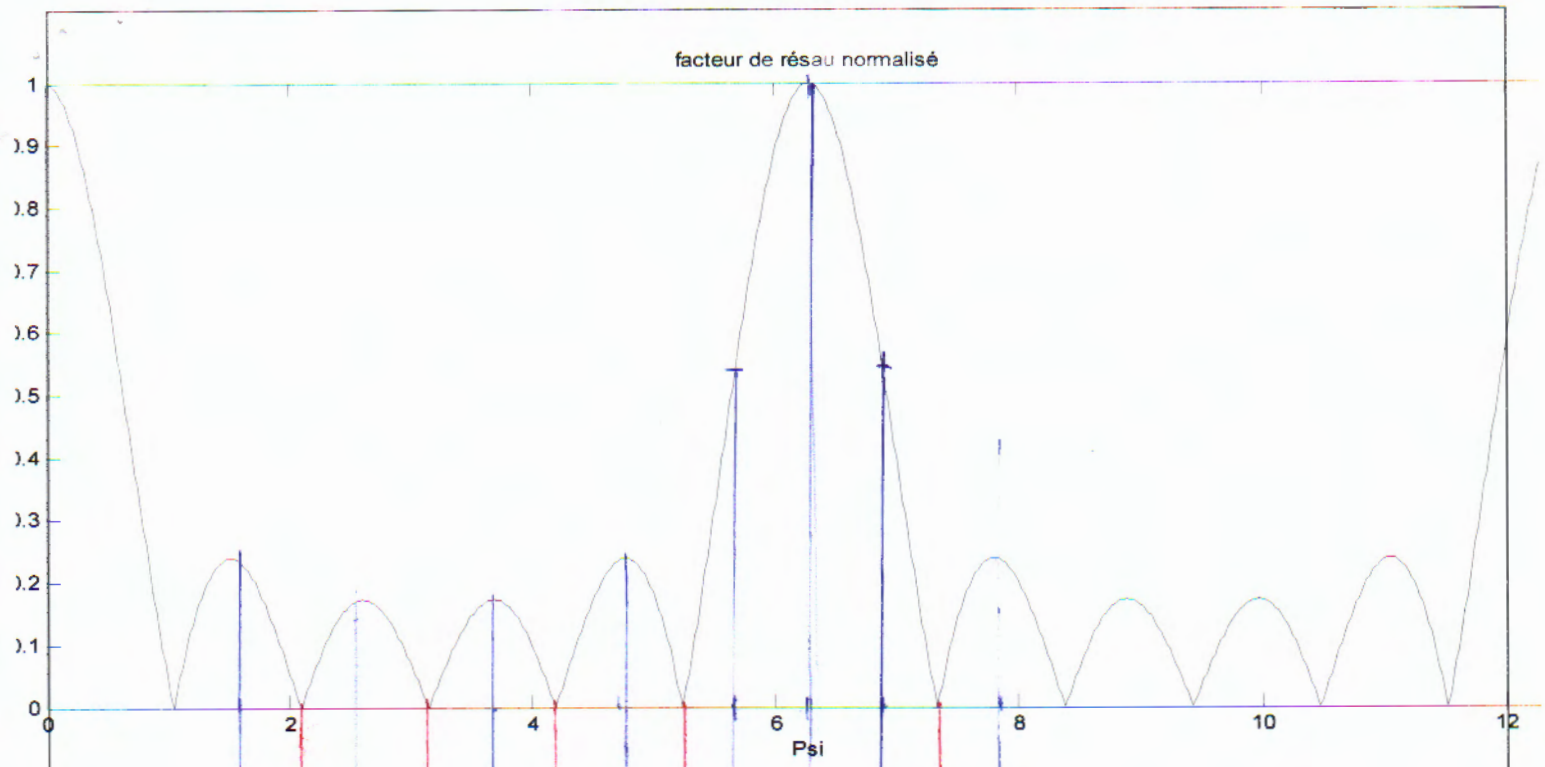
$= \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{2\pi a \times \delta}$

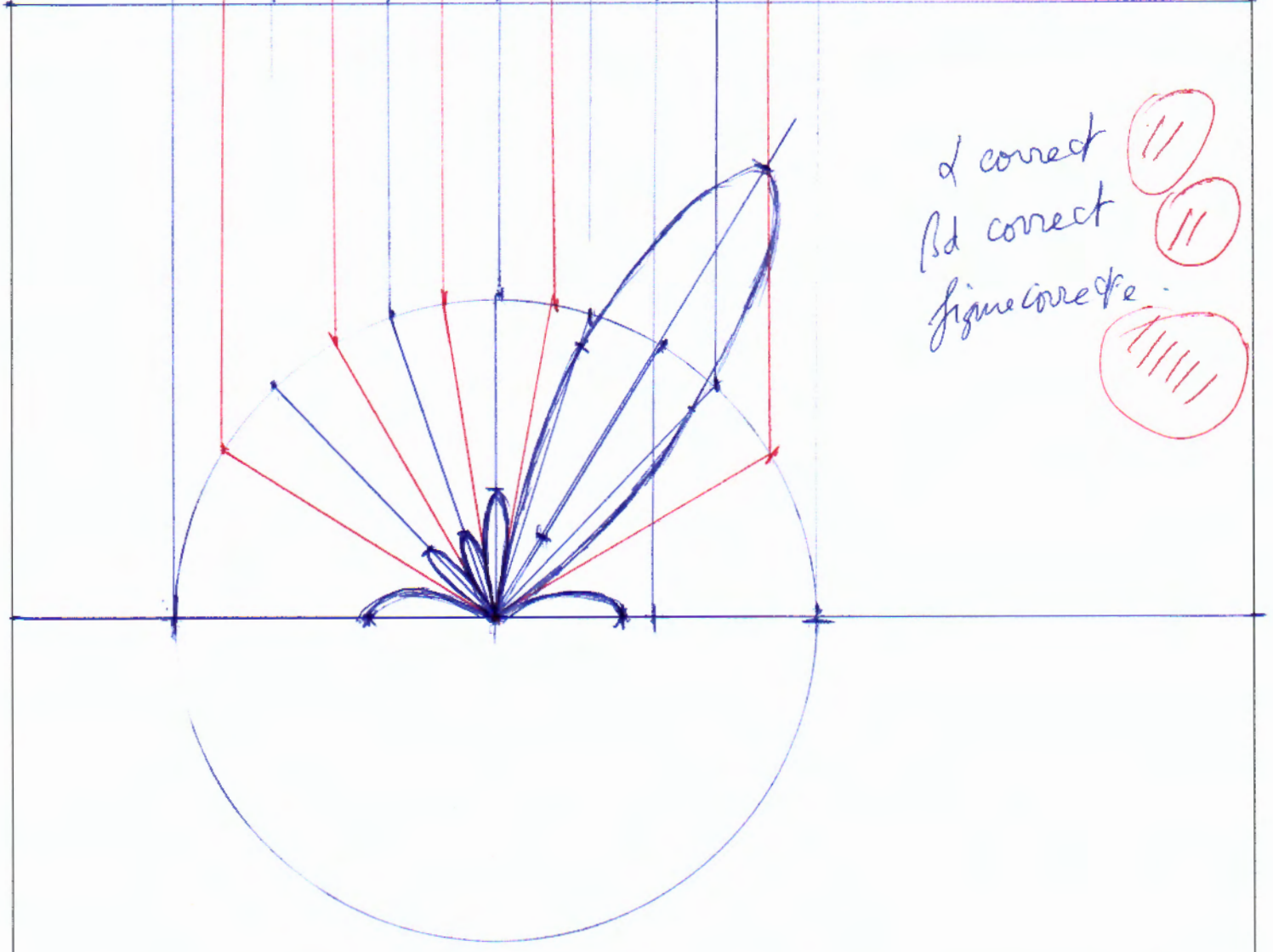
$\frac{1}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

$= \frac{1}{\sigma\delta} \frac{\ell}{2\pi a} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{\ell}{2\pi a}$

3) $\ell = 1\,m$

A.N $R_d = 9,28\ 10^{-3}\,\Omega$





α correct //
βd correct //
figure correcte ////

ENIG GCR2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Durée : 2H00. ***Documents non autorisés.***

Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

I) Soit une spire rayonnante carré parcourue par un courant électrique $I(M,t) = I_o e^{j\omega t}$ où I_o est une constante.

On place la spire carré de côté d, dans le plan xOy, de telle manière que son centre coïncide avec l'origine du système de coordonnées.

1°) a)Tracer une figure illustrant la spire en présence du point M et du système de coordonnées.

b)Trouver l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$, en fonction des distances R_1, R_2, R_3 et R_4, entre les points centraux de chaque côté du carré et le point M.

2°) Le point M est considéré, dans cet exercice comme un point éloigné; tout en justifiant votre réponse, quelles approximations doit-on faire, sur R_1, R_2, R_3 et R_4 :

a) Pour les termes d'amplitude.

b) Pour les termes de phase. (Une réponse non justifiée est considérée comme fausse).

3°) En tenant compte du résultat de la question 2°), et en considérant que $d<<\lambda$ réécrire l'expression de $\vec{A}(M)$ et la réduire sous sa forme la plus simple possible.

4°) a) Obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

b) Obtenir le champ $\vec{H}(M)$.

II) Un dipole demi-onde, dont R_d = 1,5 Ω (résistance de dissipation), est connecté à un générateur dont l'impédance interne est (55+j30)Ω . En supposant que la tension maximale délivrée par le générateur est 3 V et que l'impédance du dipôle est (73+j42.5),

1°)représenter l'ensemble antenne+générateur par un circuit équivalent.

2°) Trouver la puissance:

a) fournie par la source (réelle)

b) rayonnée par l'antenne

c) dissipée par l'antenne

III) Soit un point M dans la région de champ lointain ; établir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ dû à un dipôle de dimension finie de longueur ℓ disposé sur l'axe Oz, centré en O et parcouru par un courant quelconque I(P)$exp\,j\omega t$..

2°)déduire les expressions de $\vec{E}(M)$ puis déduire $\vec{H}(M)$.

3°)On dispose d'un dipôle demi-onde :

a) Donner l'expression du courant I(z) et tracer son profil.

b) Calculer dans ce cas le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$

c)A partir de l'expression de $\vec{A}(M)$, déduire celle de $\vec{E}(M)$.

d)Déduire l'expression du champ normalisé F(θ)

e)Déduire l'expression de $\vec{H}(M)$

f) Déduire l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$.

g)Déduire l'intensité de rayonnement U(θ).

IV) 1°) Quel est le champ normalisé d'un réseau linéaire (selon l'axe Oz), composé de 6 dipôles demi-ondes, parallèles, disposés selon l'axe Oy, équidistants (d = 3λ/4), excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha = 9\pi/4$.

2°) Tracer, en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé dans la feuille jointe avec le sujet d'examen..

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; $div\,\vec{D} = \rho$;

$div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Relations de continuité :

$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$; $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$;

$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$; $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Puissance moyenne rayonnée:

$P = \mathrm{Re}\left(\oiint \frac{1}{2}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}^* \right) \cdot d\vec{S} \right)$;

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}$;

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0 (jauge\ de\ Lorentz)$

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$; $avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$;

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R} d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source} \frac{I\,e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$

$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\,(\Omega)$

Limite de la région de champ proche :

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta\vec{u}_r\cdot\vec{r}'} d\tau_P$; $\vec{r}' = \vec{OP}$

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi)$

$\vec{u}_r \wedge \vec{E} = \zeta\vec{H}$

Champ normalisé : $F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Diagramme de puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

Directivité :

$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$, $D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gain :

$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Impédance d'antenne :

$Z_A = R_r + R_d + jX_A$; $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$.

Conducteur cylindrique :

$R_d = R_s\frac{l}{2\pi a}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

Monopole :

$R_r(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}R_r(\text{Dipole})$;

$D(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}D(\text{Dipole})$

$Z_e(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}Z_e(\text{Dipole})$

dipôle magnétique -spire circulaire :

inductance : $L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$ $pour\ a << b$

b :rayon de la spire ; a : rayon du fil

Antenne à la réception :

$P_{max}(\text{réçue}) = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$

$Pmax = \left|\vec{S}\right| A_{e\,max}$; $A_{e\,max}$:surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{e\,max}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{e\,max}$

$A_e = e_r A_{e\,max}$; $G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS :

$P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$

$EIRP = P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

RESEAUX LINEAIRES EQUIDISTANTS UNIFORMEMENT EXCITES :

Facteur de réseaux normalisé :

$FR_n = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$; $\psi = \beta d\cos\theta + \alpha$

Champ du réseau :

E(réseau)=E(élément singulier)xFR

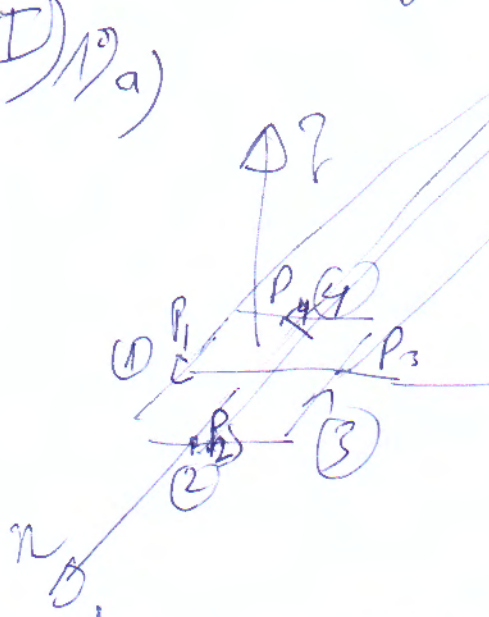
$\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ F/m

$\int \sin(a+bx)\exp(cx)dx = \frac{\exp(cx)}{b^2+c^2}[c\sin(a+bx) - b\cos(a+bx)]$

Corrigé DS An 1 – 2016-2017 – ENIG

(1)

I) 1°) a)



b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\left[\frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} - \frac{e^{-j\beta R_3}}{R_3}\right]\vec{i} + \left[\frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} - \frac{e^{-j\beta R_4}}{R_4}\right]\vec{j}\right\}$

On va supposer que $R \simeq r$ pour le terme d'amplitude de l'enlacement

b) $R_1 = \|\overrightarrow{P_1M}\|$, $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + \frac{d}{2}\vec{j}$

$\|\overrightarrow{P_1M}\| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2r\frac{d}{2}\vec{u}_r \cdot \vec{j}}$

	$\vec{u}_\rho$	$\vec{u}_\varphi$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{j}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

θ	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$
$\vec{k}$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
$\vec{u}_\rho$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\vec{u}_\varphi$	0	0	1

$\vec{j} = \sin\varphi\vec{u}_\rho + \cos\varphi\vec{u}_\varphi$
$= \sin\varphi\sin\theta\vec{u}_r + \sin\varphi\cos\theta\vec{u}_\theta + \cos\varphi\vec{u}_\varphi$

$\vec{u}_r \cdot \vec{j} = \sin\varphi\sin\theta$ $\quad d \ll r \Rightarrow R_1 = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{d}{r}\sin\varphi\sin\theta}$

$R_1 \simeq r\left(1 + \frac{d}{2r}\sin\varphi\sin\theta\right) = r + \frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta$ $\ll$

$R_3 = \|\overrightarrow{P_3M}\|$; $\overrightarrow{P_3M} = \overrightarrow{P_3O} + \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r - \frac{d}{2}\vec{j}$

donc même démarche que pour R_1 sauf qu'il y a une fois (−) $\Rightarrow$

$R_3 \simeq r - \frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta$,

Pour R_2 on a :

$R_2 = P_2M \Rightarrow \overrightarrow{P_2M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_2} = r\vec{u}_r - \frac{d}{2}\vec{i}$

$\Rightarrow R_2 = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\vec{u}_r \cdot \vec{i}}$; $\vec{i} = \cos\varphi\vec{u}_\rho - \sin\varphi\vec{u}_\varphi$

$\vec{\imath} = \cos\varphi \sin\theta \vec{u_r} + \cos\varphi\cos\theta \vec{u_\theta} - \sin\varphi \vec{u_\varphi}$

$\vec{\imath}\cdot\vec{u_r} = \cos\varphi\sin\theta$ d'où

$$R_2 \simeq r\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\varphi\sin\theta\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\varphi\sin\theta\right)$$

$\left(\frac{d^2}{4r^2} \ll\right)$

$$\boxed{R_2 \simeq r - \frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}$$

(2)

donc de même pour R_4

$R_4 = P_4M \Rightarrow \vec{R_4} = \vec{OM} - \vec{OP_4} = r\vec{u_r} + \frac{d}{2}\vec{\imath}$

$$\Rightarrow \boxed{R_4 \simeq r + \frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}$$

3°) $\vec{A}(M) \simeq e^{-j\beta r}\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r}\left\{\left[e^{-j\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta} - e^{+j\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta}\right]\vec{\imath}\right.$

$$\left. + \left[e^{+j\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta} - e^{-j\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}\right]\vec{\jmath}\right\}$$

$$\simeq e^{-j\beta r}\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r}\left\{-2j\sin\left(\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta\right)\vec{\imath} + 2j\sin\left(\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right)\vec{\jmath}\right\}$$

$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d \ll \Rightarrow$

$$\vec{A}(M) \simeq j\frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\left\{-\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\sin\theta\vec{\imath} + \frac{\pi d}{\lambda}\cos\varphi\sin\theta\vec{\jmath}\right\}$$

$$= j\frac{\mu I_0 d^2 e^{-j\beta r}}{2r\lambda}\sin\theta\left\{\underbrace{-\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}}_{\vec{u_\varphi}}\right\}$$

$$\vec{A}(M) \simeq j\frac{\mu\beta I_0 S e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\vec{u_\varphi} \quad ; \quad d^2 = S \quad (\text{surface de la spire carrée})$$

4/ $\underline{E}(M) \simeq j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$

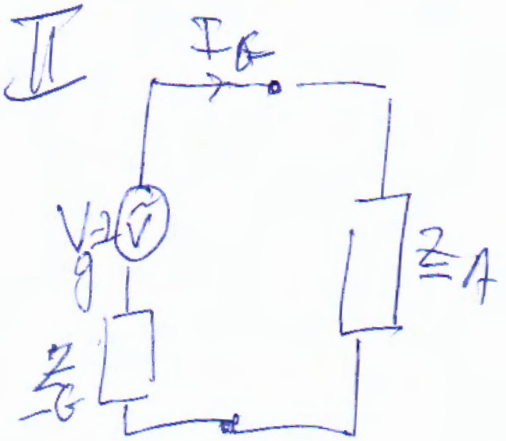
$A_\theta = 0 \Rightarrow$

$$\vec{E}(M) = \frac{\omega \mu \beta I_0 S_e}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \, \vec{u}_\varphi$$

5) $\vec{H}(M) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M)}{\zeta}$

$$\boxed{\vec{H}(M) = -\frac{\beta^2 I_0 S_e}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \, \vec{u}_\theta}$$

II



$$\underline{Z}_A = R_d + R^r + jX_A$$

$$Z_G = R_G + jX_G$$

$$\underline{I}_A = \frac{V_g}{(R_d + R_G + R^r) + j(X_A + X_G)}$$

$$= \frac{2}{129,5 + j72,5}$$ on a supposé que R_d ne fait pas partie de R_A

ou bien $\underline{I}_{b2} = \frac{3}{128 + j72,5}$ on a supposé que R_d fait partie de R_A

2) a) puissance fournie (Deuxième cas)

$$P_f = R_e\left(\frac{1}{2} V_g I_f^*\right) = \frac{1}{2} R_e \, V_g \frac{V_g^*}{Z_{éch}^*} = \frac{1}{2} \frac{9^{Eq}}{128 - j72,5}$$

$$P_g = \frac{1}{2}\frac{R_e (128)}{(128)^2 + (725)^2} = (26,62 + j\,15,08)\,mW$$

$$= 26,62\ mW$$

b) Puissance rayonnée (Premier cas)

$$P = \frac{1}{2} R^r |I_g|^2 = 14,87\ mW$$

c) Puissance dissipée (Premier cas)

$$P_d = \frac{1}{2} R_d |I_g|^2 = 0,3119\ mW$$

Pour le premier cas c'est à dire en supposant R_d non comprise dans R_e 73 Ω on aura

$P_g = 26,46\ mW$

$P = 14,91\ mW$

$P_d = 0,3064\ mW$

III) $$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi(E)} \int_{-l/2}^{+l/2} I(P) \frac{e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k}$$

Pour le terme d'amplitude $R \simeq r$ pour le terme de phase $R \simeq r - z_p \cos\theta$



$$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-l/2}^{+l/2} I(P)\, e^{j\beta z_p \cos\theta}\, dz_p\, \vec{k}$$

2) $\vec{k} = \cos\theta \vec{u_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

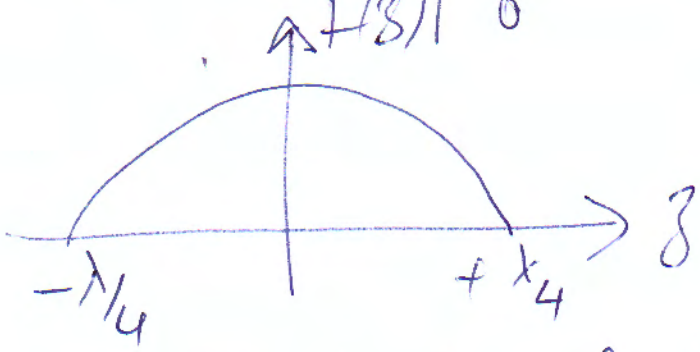
$\vec{E} \simeq -j\omega \vec{A_\theta} \vec{u_\theta} = j\omega\mu \frac{\sin\theta\, e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I(z_p) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p \right) \vec{u_\theta}$

$\vec{H} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{\eta} = j \frac{\beta \sin\theta\, e^{-j\beta r}}{4\pi r} \underbrace{\left(\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I(z_p) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p \right)}_{J} \vec{u_\varphi}$

$\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_\varphi}$

$\frac{\omega\mu}{\beta} = \beta$

3) a) $I(z) = \begin{cases} I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] & \text{pour } |z_p| < \frac{\lambda}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



b) Il faut calculer l'intégrale J

$J = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p$ tq.

$= J_1 + J_2$; $J_1 = \int_{-\ell/2}^{0}$ ( ) et $J_2 = \int_0^{+\ell/2}$

on utilise la formule donnée au formulaire on fait les développement (voir cours) et on obtient

$$\vec{A(M)} = \frac{\mu 2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\cos\left[(\pi/2)\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{k}$$

c) $\vec{E} = -j\omega \vec{A(M)} = j\omega\mu \frac{2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_\theta}$

d) $F(\theta) = \frac{E}{E_{max}} = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin\theta}$ $\left(E_{max} = F(\theta = \frac{\pi}{2})\right)$

e) $\vec{H} = j\beta \frac{2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_\varphi}$

f) vecteur de Poynting

$$\vec{R} = \frac{|E|^2}{2\eta} \vec{u_r} = \frac{\omega^2\mu^2 |I_0|^2}{2\eta (2\pi r)^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_r}$$

$$\vec{R} = \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_r}$$

g) $U(\theta) = R_r \varphi^2$

$$= \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta}$$

(7)

IV) $N=6$; $\psi = \beta d \cos\theta + \alpha$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3\lambda}{4} \cos\theta + \frac{9\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}(2\cos\theta + 3)$$

$$FR_n = \frac{A \sin N\frac{\psi}{2}}{N A \sin\frac{\psi}{2}} = \frac{\sin\left[6 \times \frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}{6 \sin\left[\frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}$$

Champ normalisé (voir ex III)

$$F(\theta) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right]}{\sin\gamma} \quad ; \quad \cos\gamma = \vec{u_r} \cdot \vec{j}$$

$$= \sin\varphi \sin\theta$$

(car I)

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

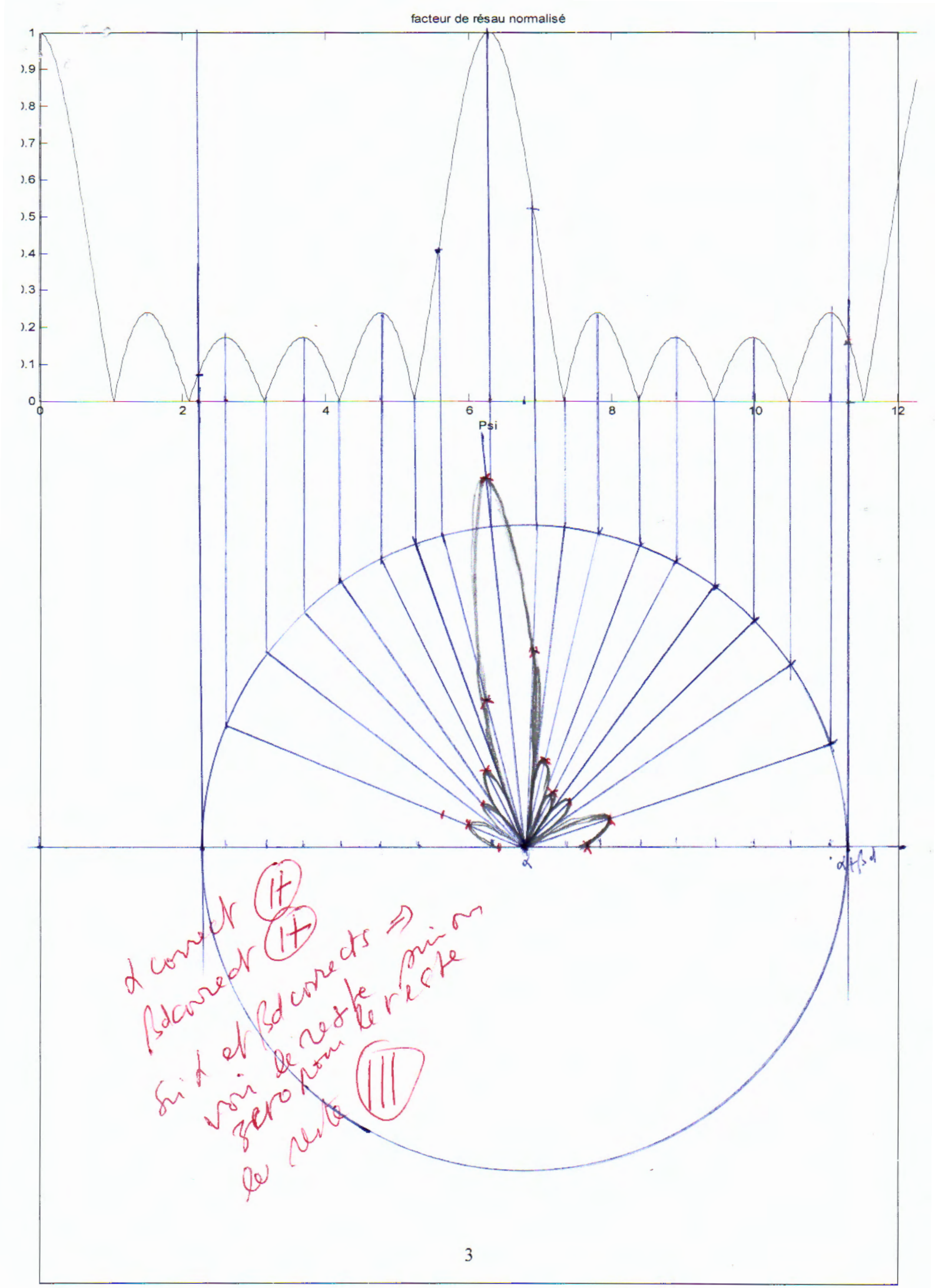
$$\mathcal{E}_n = FR_n \times F(\theta)$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\sin\varphi\sin\theta\right]}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}} \cdot \frac{\sin\left[\frac{9}{4}\pi(2\cos\theta+3)\right]}{6\sin\left[\frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}$$

2) 193 mm → 4π

α → $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3\lambda}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} = 1{,}5\pi = 72{,}38$ mm

φ → $\alpha = \frac{9}{4}\pi = 2{,}25\pi = 108{,}56$



d correct (1+)
Bd correct (1+)
Si d et Bd corrects ⇒ voir de reste pour zero pour la reste de reste (1/1)

ENIG	Devoir de Contrôle Antennes et propagation libre	Ens :M. Benzina H
Année Universitaire : 2019/2020		Durée : 01h30
		Section :GCR2

N.B: Lorsqu'on demande d'établir une expression ou de montrer quelque chose, les résultats « parachutés », même s'ils sont corrects, seront considérés comme faux. Ne pas oublier de mentionner le numéro de la question.

Rappel : L'appareil téléphonique est interdit ; L'usage du Blanco correcteur n'est pas du tout souhaité, quelle que soit la raison.

Exercices: cadre général régime sinusoidal

I)1°)A partir des équations de Maxwell, montrer que, sous une condition sur $\vec{A}(M)$. Et V(M), on pourra établir l'équation suivante :

$\Delta \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$; avec $\beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$

Comment s'appelle la condition et comment s'appelle l'équation ainsi obtenue.

2°)Quelle est alors la solution de cette équation?

3°)Trouver une équation équivalente pour le potentiel V(M)

II) Soit un **dipôle de dimension finie de longueur l disposé symétriquement selon l'axe Oz,** où le point M se trouve **dans une région quelconque de l'espace** suffisamment éloignée :

1°) a) Tracer une figure illustrant cette situation. Quelle est la symétrie présente dans ce cas et quelle conséquence aura-t-elle.

b) Etablir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ qui est une fonction du courant I(P).

2°) En supposant que le courant qui circule dans le dipôle est constant spatialement et égal à Io,

a) Tracer le profil du courant dans une figure.

b)Déterminer alors l'expression de $\vec{A}(M)$.

3°) Dans le cas où M est dans la région de champ lointain (RCL) :

a) Déduire les expressions de $\vec{E}$. et de $\vec{H}$.

b) Montrer que $\vec{\pi} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2\zeta}\vec{u}$ dans la RCL, puis donner son expression dans le cas ici présent.

c) Que deviennent les expressions de $\vec{A}(M)$, $\vec{E}(M)$, $\vec{H}(M)$ et $\vec{\pi}(M)$, lorsque la longueur du dipôle l devient négligeable. Dans quels cas sommes-nous alors.

4°) On revient à la question 2°) et on néglige la longueur du dipôle l, (région quelconque)

a) Réécrire alors l'expression de $\vec{A}(M)$.

b) Obtenir l'expression du champ $\vec{H}(M)$.

c) Obtenir l'expression du champ $\vec{E}(M)$.

d) Simplifier les expressions des champs dans le cas de champ proche (indiquer dans quelle condition cela est possible)

e) Déduire l'expression du vecteur de Poynting complexe.

f) Déduire alors la puissance moyenne rayonnée. Conclure.

III) On reprend à partir de la question II)-3-c (cas RCL)

1°) Quelle est l'expression du champ normalisé et de la puissance normalisée.

2°) a) Quelle est la définition d'un diagramme de rayonnement plan-H.

b) Esquisser le diagramme plan H dans notre cas.

c) Comment s'appelle ce genre de diagramme et quelle est son utilité.

3°)Donner l'expression de l'intensité du rayonnement.

4°)Déduire de 3°) l'expression de la puissance moyenne rayonnée.

5°)Quelle est alors le gain si l'efficacité du rayonnement est de 0,75.

6°) Etablir l'expression de la résistance du rayonnement dans ce cas.

Bon travail

FORMULAIRE DU MODULE ANTENNES ET PROPAGATION

Equations de Maxwell en régime sinusoidal:

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$ $\qquad$ $\vec{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$

$\text{div}\,\vec{D} = \rho$ $\quad$ $\text{div}\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\qquad$ $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Vecteur de Poynting sinusoidal :

$\vec{\pi} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}x\vec{H}^*\right)$

Puissance rayonnée:

$P = Re(\oiint \vec{\pi}.\vec{dS})$;

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}}\,\vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V - j\omega\vec{A}$;

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source}\frac{I e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$

Limite de la region de champ proche :

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta\vec{u}_r.\vec{r}'}\,d\tau_P$; $\vec{r}' = \vec{OP}$

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi)$; $\vec{u}_r \text{ x } \vec{E} = \zeta\vec{H}$

Champ normalisé :

$F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

Directivité :

$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega,$

$D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gain :

$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Formule utile :

$\vec{rot}(f\vec{u}) = \vec{grad}(f)\times\vec{u} + f\,\vec{rot}(\vec{u})$

Rotationnel en coordonnées sphèriques

$$\vec{rot}(X) = \frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(X_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial X_\theta}{\partial\varphi}\right] + \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rX_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u_\varphi}}{r}\left[\frac{\partial(rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial\theta}\right]$$

corrigé DC ANT 2019.2020

I) 1°) $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}(\ ) = \overrightarrow{grad}\,div(\ ) - \Delta(\ )$.

$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + j\omega\varepsilon\overrightarrow{E}$ (1) ; $\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})}{\mu}$ (1) $\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})}{\mu}\right) = \overrightarrow{J} + j\omega\varepsilon\overrightarrow{E}$ (1)

$\frac{1}{\mu}\left[\overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{A})) - \Delta\overrightarrow{A}\right]$ (1) $= \overrightarrow{J} + j\omega\varepsilon\left(-\overrightarrow{grad}\,V - j\omega\overrightarrow{A}\right)$ (1)

$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - j\omega\overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{A})) - \Delta\overrightarrow{A} = \mu\overrightarrow{J} - j\omega\mu\varepsilon\overrightarrow{grad}\,V - \omega^2\varepsilon\mu\overrightarrow{A}$

$\Delta\overrightarrow{A} + \beta^2\overrightarrow{A} = -\mu\overrightarrow{J} + \overrightarrow{grad}\left(j\omega\mu\varepsilon V + div\overrightarrow{A}\right)$ (1) $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ (1)

comme V est défini à une cte près et $\overrightarrow{A}$ à un grad d'une fonction scalaire près donc on a droit de poser $j\omega\mu\varepsilon V + div\overrightarrow{A} = 0$ (*) (1) c'est la jauge de Lorentz (1)

L'équation obtenue $\Delta\overrightarrow{A} + \beta^2\overrightarrow{A} = -\mu\overrightarrow{J}$ est l'équation de propagation (1)

13

2°) La solution de cette équation est

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{source}\frac{\overrightarrow{J}(P)e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \quad ; R = PM$$

(ou $= \int_{(source\ filaire)}\frac{\overrightarrow{I}(P)e^{-j\beta R}}{R}\overrightarrow{dl_P}$)

////

4

3°) $div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (1), $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - j\omega\overrightarrow{A}$ (1) $\Rightarrow div\left(-\overrightarrow{grad}\,V - j\omega\overrightarrow{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (1)

$div\,\overrightarrow{grad}(V) + j\omega\,div\overrightarrow{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ (1) ; d'après (*) $div\overrightarrow{A} = -j\omega\mu\varepsilon V$ (1)

$\Delta V + j\omega(-j\omega\mu\varepsilon)V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ (1) $\Rightarrow \Delta V + \beta^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ (1)

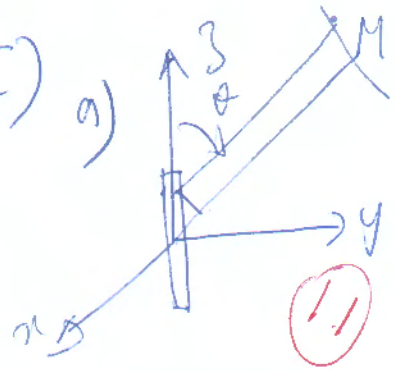
7

I : 24/5

I = 24
II = 59
III = 33
117/5 → 1/5 = 0,2 ⇒ note/23,4

(2)

II) a)



(1)

Symétrie axiale ⇒ pas de dépendance en φ (1)

b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} \frac{I(P)\, e^{-j\beta R}}{R} dz_p \vec{k}$ (1)

pour le terme d'amplitude : $R \simeq r$ (1)

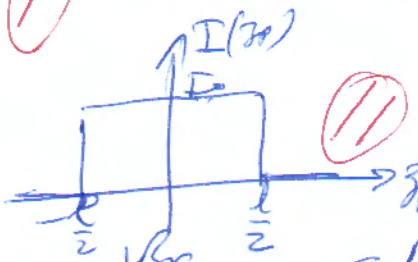
pour le terme de phase $R = PM = \|\vec{PM}\|$;

$\vec{PM} \cdot \vec{e_z} = z_p \cos\theta$ $\quad R \simeq r - z_p \cos\theta$ (1)

$$\Rightarrow \vec{A}(M) \simeq \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\ell/2} I(z_p)\, e^{+j\beta z_p \cos\theta}\, dz_p \vec{k}$$ (1)

11

2) a) $I(z_p) = I_0$ pour $|z_p| \leq \frac{\ell}{2}$



(1)

b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\ell/2} I_0\, e^{+j\beta z_p \cos\theta}\, dz_p \vec{k}$ (1)

$= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} I_0 \frac{1}{j\beta\cos\theta} \left[e^{+j\beta z_p \cos\theta} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \vec{k}$ (1)

$= \frac{\mu I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \frac{1}{j\beta\cos\theta} \left[e^{+j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta} - e^{-j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta} \right] \vec{k}$ (1)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \cos\theta} \sin\left[\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right] \vec{k}$$ (1)

6

3) $\vec{E} \simeq -j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$ (1) $\quad \vec{k} = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$ (1)

$$\Rightarrow \vec{E} = +j\omega\mu \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \cos\theta} \sin\left[\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right] \sin\theta \vec{u}_\theta$$ (1)

$$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\eta} = j\beta \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \cos\theta} \sin\left[\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right] \sin\theta \vec{u}_\varphi$$ (1)

$$\vec{A} \simeq j \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} \sin\left[\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right] \tan\theta \vec{u}_\varphi$$ (1)

b) $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E} \wedge \vec{H}^*$; Dans le cas RCL ; $\vec{H} = \vec{u_r} \wedge \vec{E}$ (3)

$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E} \wedge (\vec{u_r} \wedge \vec{E}^*) = \frac{1}{2\eta}\left((\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\vec{u_r} - (\vec{E}\cdot\vec{u_r})\vec{E}^*\right)$ (1) (1) (1) (1)

$= \frac{1}{2\eta}\|\vec{E}\|^2 \vec{u_r}$ (1) . Dans ce cas $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\eta}\frac{\eta^2 |I_0|^2}{(2\pi)^2 r^2} \sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right] \vec{u_r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2 r^2} \sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right] \vec{u_r}}$ (II)

c) $\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \cos\theta}\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{k}$; $\sin\theta \simeq \theta$

$\boxed{\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} e^{-j\beta r}\vec{k}}$ (II)

$\rightarrow \vec{E} \simeq j\omega \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \cos\theta} \frac{\beta l}{2}\cos\theta \sin\theta \vec{u_\theta} \simeq \frac{j\omega\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta \vec{u_\theta}$ (II)

$\rightarrow \vec{H} \simeq j\frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\frac{\beta l}{2}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\sin\theta \vec{u_\varphi} \simeq \frac{j\beta I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta \vec{u_\varphi}$ (II)

$\rightarrow \vec{\Pi}(M) \simeq \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right)^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\vec{u_r}$

$\vec{\Pi}(M) \simeq \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 l^2}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta \vec{u_r}$ (II)

Nous pouvons dans le cas de dipôle idéal (1)

4) a) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{r}\vec{k}$ (dipôle idéal). (4)

b) $\vec{H}(M) = \frac{\vec{rot}\,\vec{A}}{\mu} = \vec{rot}(A_z\vec{k}) = \vec{grad}A_z \wedge \vec{k} + A_z \vec{rot}\,\vec{k}$.

$\vec{rot}\,\vec{k} = \vec{0}$ $\quad \vec{grad}(A_z) = \frac{\mu}{4\pi} I_0 l \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\vec{u_r} = \frac{\mu}{4\pi} I_0 l \left(\frac{(-j\beta r - 1)e^{-j\beta r}}{r^2}\right)\vec{u_r}$

$\vec{H}(M) = -\frac{I_0 l}{4\pi r^2}(1+j\beta r)e^{-j\beta r}(\vec{u_r}\wedge\vec{k})$ $\quad \vec{u_r}\wedge\vec{k} = -\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$ $\Rightarrow$

$\vec{k} = \cos\theta\vec{u_r} - \sin\theta\vec{u_\theta}$

$\vec{H}(M) = \frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r^2}(1+j\beta r)\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

c) $\vec{E}(M) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{rot}\,\vec{H}$, $\vec{H} = H_\varphi\vec{u_\varphi}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi\sin\theta)\right] + \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[-\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right]\right\}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l}{4\pi}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r^2}(1+j\beta r)\sin^2\theta\right)\right] + \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}(1+j\beta r)\sin\theta\right)\right]\right\}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l}{4\pi}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\frac{e^{-j\beta r}}{r^2}(1+j\beta r)2\sin\theta\cos\theta - \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[(-j\beta)e^{-j\beta r}\left(\frac{1}{r}+j\beta\right) + \frac{e^{-j\beta r}}{r^2}\right]\sin\theta\right\}$

$\vec{E}(M) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l}{4\pi r^3}e^{-j\beta r}\left\{(1+j\beta r)2\cos\theta\,\vec{u_r} + \left[+j\beta r(1+j\beta r) + 1\right]\sin\theta\,\vec{u_\theta}\right\}$

d) cas de champ proche $\Rightarrow \beta r \ll 1$ $(r \ll \lambda)$.

$\vec{H}(M) \simeq \frac{I_0 l}{4\pi r^2}e^{-j\beta r}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$ et $\vec{E}(M) \simeq \frac{I_0 l}{j\omega\varepsilon 4\pi r^3}e^{-j\beta r}\left\{2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right\}$

e) $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^* = \frac{1}{2}\frac{|I_0|^2 l^2}{(4\pi)^2 r^5}\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left\{2\sin\theta\cos\theta\,\vec{u_\theta} + \sin^2\theta\,\vec{u_r}\right\}$

f) $P = \mathrm{Re}\iint_{\text{Espace}}\vec{\Pi}.d\vec{S} = 0$ car Π est imaginaire pur

Conclusion dans le region de champ proche le phenomene est semblable à une onde stationnaire ceci etant d'autant plus que $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont en quadrature de phase : la puissance est reactive

$\Pi = 29 + 24 + 6 = 59$ pts

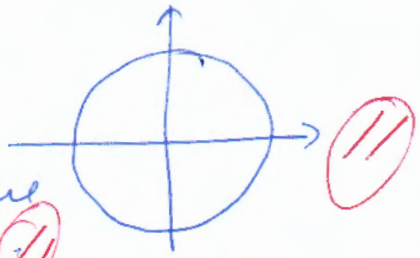
29

(5)

III) 1°) champ normalisé $F(\theta) = \frac{E\theta}{E\theta max} = \sin\theta$ (1) (1) | puissance normalisée $P(\theta) = |F(\theta)|^2 = \sin^2\theta$ (1) (1)

2°) a) Un diagramme plan - H est celui qui contient le champ $\vec{H}$ ainsi que la direction de maximum de rayonnement (1)

b) Dans notre cas



(1)

c) c'est un diagramme omnidirectionnel (1) 4

3°) $U(\theta) = \Pi_4 r^2$ (1) $= \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2 \sin^2\theta}{32\pi^2}$ (1) 6

4°) $P = \iint_{Hemisphère} U\theta \, d\Omega$ (1) ; $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$: angle solide élémentaire (1)

$= \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta\right] \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{32\pi^2}$

$= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du \; \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{32\pi^2}$

$= 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{32\pi^2} = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{16\pi} \frac{4}{3} = \frac{\omega\mu\beta (|I_0|\ell)^2}{12\pi}$ (1) (1) (1) (1) 3

5°) $U_{max} = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{32\pi^2}$ (1), $U_{moyen} = \frac{P}{4\pi} = \frac{\omega\mu\beta (|I_0|\ell)^2}{48\pi^2}$ (1) 7

Directivité : $D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{48\pi^2}{32\pi^2} = \frac{3}{2}$ (1) (1)

Gain : $G_T = \eta_r D = 0,75 \times \frac{3}{2} = 1,125$ (1) (1) 9

6) Résistance de rayonnement

$R^r = \frac{2P}{|I_0|^2}$ (1) $\frac{\omega\mu\beta\ell^2}{6\pi} = \frac{\omega\mu\beta^2\ell^2}{\beta \cdot 6\pi} = \frac{\eta}{6\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \ell^2$ (1)

$= \frac{120\pi \times 4\pi^2}{6\pi} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$ (1) 4

$\Pi = 4+6+3+7+9+4 = 33$ ~~35~~ 33/35

ENIG

GCR2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

Date : 03/01/2020
Durée : 2H00.Enseignant responsable :BENZINA.H

Rappel :Documents, Gsm, Smartphones, calculatrices non standards, non autorisés.

On travaille en régime temporel sinusoïdal :

I) Soit un dipôle vertical(disposé suivant Oz) de longueur l non négligeable devant la longueur d'onde, parcouru par un courant $I(z)=I_0\sin[\beta(\frac{l}{2}-|z|)]$ pour $|z|\leq\frac{l}{2}$ et I(z) est nul partout ailleurs.

1°) a) Donner , en un point M quelconque, l'expression de départ du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$.
Dans la suite on supposera le point M appartenant à la région de champ lointain.

b)En supposant $\varphi=0$, développer l'expression précédente de $\vec{A}(M)$, en négligeant les variations des termes d'amplitude mais pas celles de phase.

2°)Obtenir les expressions des champs $\vec{E}(M)$ et de $\vec{H}(M)$.

3°) a)On suppose que $l=\lambda/2$, quelle est alors l'expression de $\vec{E}(M)$.
b) Déduire l'expression du champ normalisé $F(\theta)$.

II) On se propose d'étudier une spire rayonnante circulaire de petite dimension, parcourue par un courant électrique $I(z,t)=I_o e^{j\omega t}$. (I_o est une constante complexe) Sachant que le point M se trouve dans le région de champ lointain et que S est la surface de la spire :

1°)Obtenir les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{H}(M)$.
2°) Trouver l'expression de la puissance moyenne rayonnée de la spire.
3°) a)Déduire l'expression de la résistance de rayonnement. Simplifier l'expression et la donner en fonction de la surface de la spire et de la longueur d'onde.
b)Comment peut-on augmenter la résistance de rayonnement ?
c)Comment calcule-t-on la résistance ohmique de cette spire ?
4°)Sachant que la longueur de la spire est $0,33\lambda$, que le diamètre de la section du fil est égale à $0,0015\lambda$, que le fil est fait à partir d'un conducteur de conductivité $\sigma=3,310^7 Sm^{-1}$ et que la fréquence de travail est de 33MHz
a)Quelle est la valeur de la résistance de rayonnement de la spire.
b)Quelle est la valeur de sa réactance.
c)Calculer sa résistance de dissipation.
d)Que vaut l'impédance d'entrée de cette antenne ?
e)Que vaut l'efficacité de rayonnement de cette antenne ?

III)1°) Trouver le champ normalisé d'un réseau linéaire disposé tout au long de l'axe Oz, formé de 4 dipôles de même type que celui de la partie I), équidistants : la distance entre deux dipôles consécutifs est $d=\lambda/4$, parallèles à l'axe Ox, de telle manière qu'ils soient uniformément excités et que les déphasages soient réglés pour un rayonnement transversal.

2°)Tracer, dans la feuille jointe avec le sujet d'examen , en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé, d'un réseau linéaire horizontal de 4 dipôles infinitésimaux verticaux équidistants ($d=\lambda/4$), colinéaires, excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha=3\pi/4$.

"

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; $div\,\vec{D} = \rho$; $div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Relations de continuité :

$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$; $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$; $\vec{n}.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$;

$\vec{n}.(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Puissance moyenne rayonnée:

$P = \mathrm{Re}\left(\iint_S \frac{1}{2}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}^* \right).d\vec{S} \right)$;

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}$;

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0$ (*jauge de Lorentz*)

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$; *avec* $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source} \frac{I\,e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$

$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\ \Omega$

Olp lwh#gh#od#u†jlrq#gh#fkdp s#surfkh

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Fdv#j†q†udq#fkdp s#orlqwdlq

$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta \vec{u}_r.\vec{r}'}d\tau_P$; $\vec{r}' = \vec{OP}$

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi)$

$\vec{u}_r \wedge \vec{E} = \zeta\vec{H}$

Fkdp s#grup dolv†#$F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

G ldjudp p h#gh#sxlvvdqfh#grup dolv†h

$S(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Iqwhqvlw†#gh#ud|rqqhp hqw

$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

G luhfwlylw†

$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$, $F = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gdlq

$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $I = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Hiilfdflw†#gx#ud|rqqhp hqw

$e_r = \frac{P}{P_e}$

Ip s†qdqfh#gu'dqwhqqh

$Z_A = R_r + R_d + jX_A$; $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Hsdlvvhxu#gh#shdx#$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

Frqgxfwhxu#f|oqgultxh#$R_d = \frac{o}{2\pi a}R_S$

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

Prqrsrdh

$R_r(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}R_r(\text{Dipole})$; $D(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}D(\text{Dipole})$

$Z_e(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}Z_e(\text{Dipole})$

gls`dh#p djq†wlltxh

$\overrightarrow{A(M)} = \frac{j\beta S\mu I_o e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$

vs luh#flufxodluh

lqgxfwdqfh#$L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75 \right]$ *pour* $a << b$

e#ud|rq#gh#bd#vsluh#bd#ud|rq#gx#ild

Dqwhqqh#k#bd#u†fhswlrq

$S_{p\,d(\text{-}u\dagger\dagger xh,@} = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$

Pmax $= \left|\vec{S}\right| A_{e\,max}$; $A_{e\,max}$:surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{e\,max}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{e\,max}$

$A_e = e_r A_{e\,max}$; $G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS :

$P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$

EIRP=$P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

RESEAUX LINEAIRES EQUIDISTANTS UNIFORMEMENT EXCITES :

Facteur de réseaux normalisé :

$FR_n = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$; $\psi = \beta d\cos\theta + \alpha$

Champ du réseau :

E(réseau)=E(élément singulier)xFR

$\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ F/m

$\int \sin(a+bx)\exp(cx)dx = \frac{\exp(cx)}{b^2+c^2}[c\sin(a+bx) - b\cos(a+bx)]$

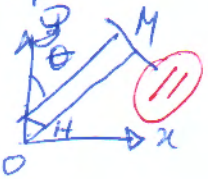
Corrigé détaillé DS Antennes 2019/2020

I) 1)a) $\overrightarrow{A(M)} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\ell/2} \frac{I(z_p)\, e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k} = \frac{\mu I_0}{4\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\ell/2} \frac{\sin[\beta(\frac{\ell}{2}-|z_p|)]\, e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k}$

b) pour le terme d'amplitude $R \simeq r$

pour le terme de phase $R \simeq r - z_p\cos\theta$

car $R = PM = \|\overrightarrow{PM}\| = OM - \overrightarrow{OH} = r - z_p\cos\theta$



Dans ce cas $\overrightarrow{A(M)} = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left\{\underbrace{\int_{-\frac{\ell}{2}}^{0} \sin\left[\beta\left(\frac{\ell}{2}+z_p\right)\right] e^{+j\beta z_p\cos\theta}\, dz_p}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\ell/2} \sin\left[\beta\left(\frac{\ell}{2}-z_p\right)\right] e^{j\beta z_p\cos\theta}\, dz_p}_{I_2}\right\}\vec{k}$

Sur le formulaire on trouve :

$$\int \sin(a+bx)\exp(cx)\,dx = \frac{\exp(cx)}{b^2+c^2}\left[c\sin(a+bx) - b\cos(a+bx)\right]$$

pour I_1 (voir ci-dessus) : $a = \frac{\beta\ell}{2}$; $b = \beta$ et $c = j\beta\cos\theta$

et donc $I_1 = \left\{\frac{\exp[j\beta z_p\cos\theta]}{\beta^2 - \beta^2\cos^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin\left(\beta\frac{\ell}{2}+\beta z_p\right) - \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}+\beta z_p\right)\right]\right\}_{-\frac{\ell}{2}}^{0}$

$= \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin\left(\beta\frac{\ell}{2}\right) - \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right] - \frac{\exp\left[-j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right]}{\beta^2\sin^2\theta}\left[\underbrace{j\beta\cos\theta\sin 0}_{0} - \beta\cos 0\right]$

$I_1 = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left\{j\beta\cos\theta\sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) - \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + \beta\exp\left[-j\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right]\right\}$ 1 pt

pour I_2 : $a = \frac{\beta\ell}{2}$; $b = -\beta$ et $c = j\beta\cos\theta$

et donc $I_2 = \left\{\frac{\exp[j\beta z_p\cos\theta]}{\beta^2 - \beta^2\cos^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin\left(\frac{\beta\ell}{2}-\beta z_p\right) + \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}-\beta z_p\right)\right]\right\}_0^{\ell/2}$

$= \left\{\frac{e^{\left(j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)}}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin 0 + \beta\cos 0\right] - \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left[j\beta\cos\theta\sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) + \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right]\right\}$

$I_2 = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left\{\beta\exp\left[j\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right] - j\beta\cos\theta\sin\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) - \beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right\}$ 1 pt

$I_1 + I_2 = \frac{1}{\beta^2\sin^2\theta}\left\{\beta\cos\left[\beta\frac{\ell}{2}\cos\theta\right] - 2\beta\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right\}$

finalement $\overrightarrow{A(M)} = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\sin^2\theta}\left[\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)\right]\vec{k}$

2°) RCL $\Rightarrow \vec{E}(M) = -j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$ (1)

$\vec{k} = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$ (1)

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{j\omega\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \beta \sin\theta}\left[\cos\left(\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right]\vec{u}_\theta$ (1)

$\vec{H}(M) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M)}{\eta} = j\frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \sin\theta}\left[\cos\left(\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right]\vec{u}_\varphi$ (1)

$\left[\frac{\omega\mu}{\beta} = \eta\right]$ (1)

3°) a) $l = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \beta\frac{l}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\vec{E}(M) = j\frac{\eta I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \sin\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\vec{u}_\theta$ ($\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

$\vec{E}(M) = j\frac{\eta I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r \sin\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]\vec{u}_\theta$ (1)

b) $F(\theta) = \frac{E_\theta}{E_{\theta max}}$ (1) ; E_θ extrema lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ (1)

$\Rightarrow F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$ (1)

II) 1°) D'après la formulaire on a :

$\vec{A}(M) = j\frac{\beta S \mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta \vec{u}_\varphi$ (1)

Dans la RCL $\vec{E} = -j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$ (1)

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\omega\mu\beta S I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta \vec{u}_\varphi$; (1)

$\vec{H}(M) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M)}{\eta} - \frac{\beta^2 S I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta \vec{u}_\theta$ (1)

$\left[\frac{\omega\mu}{\beta} = \eta\right]$ (1)

2°) $\vec{\Pi} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta}\vec{u}_r$ (1) et $P = Re\iint_{\Sigma_E}\vec{\Pi}.d\vec{S}$ (1)

(2)

$$P = \frac{1}{2}\eta \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{\omega\mu\beta |I_0| \sin\theta}{4\pi} \right)^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\eta \beta^4 S^4 |I_0|^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \quad ; \quad \left| \frac{\omega\mu}{\eta} = \beta \right.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_{-1}^{1} (1 - \cos^2\theta) \, d\cos\theta \quad ; \quad u = \cos\theta$$

$$= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) = 2 - \frac{2}{3} = 4/3$$

$$= \frac{\eta (\beta^2 |I_0| S)^2}{32\pi^2} 2\pi \frac{4}{3} \quad \left| \eta = 120\pi \right. \quad \frac{\eta}{12\pi} (\beta^2 |I_0| S)^2$$

$$\boxed{P = 10 (\beta^2 |I_0| S)^2} \quad (2)$$

3°) a) $R^r = \frac{2P}{|I_0|^2} = 20 (\beta^2 S)^2 = 20 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 S^2 = 20 \times 16\pi^4 \left(\frac{S}{\lambda^2} \right)^2$ (1) (1)

$$R^r \simeq 31200 \left(\frac{S}{\lambda^2} \right)^2 \quad (3)$$

b) On peut augmenter R^r en augmentant le nombre N de tours. (N spires) cela augmenterait de N^2 fois R^r (2)

c) R_d est la même que pour un dipôle idéal sauf que la longueur l doit correspondre au périmètre de la spire donc : $R_d = R_s \frac{l}{2\pi a}$ (1), a est le rayon de la fil conducteur et $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ (voir formulaire).

4°) $l = 0{,}33\lambda$ et $a = \frac{0{,}0015\lambda}{2}$, $\sigma = 3{,}3\,10^7\,Sm^{-1}$

$f = 33\,10^6\,Hz$.

a) R^r ? $S = \pi b^2$ b. rayon de la spire

$l = 2\pi b \Rightarrow b = \frac{l}{2\pi} \Rightarrow S = \pi \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$

$$R^r = 31200 \left(\frac{(0{,}33\lambda)^2}{4\pi} \right)^2 = 31200 \left(\frac{(0{,}33)^2}{4\pi} \right)^2 = 2{,}343\,\Omega \quad (4)$$

b) Réactance : $X_L = \omega L = \omega\mu b \left[\log\left(\frac{8b}{a} \right) - 1{,}75 \right] =$ (1) (1)

$$X_A = 2\pi \frac{c}{\lambda} 4\pi 10^{-7} \times \frac{\ell}{2\pi}\left[\log\left(8\frac{\ell}{2\pi a}\right) - 1{,}75\right]$$ (4)

$$= 2\pi \times \frac{3\times 10^8}{\lambda} \times 4\times\pi\times 10^{-7} \times \frac{0{,}33\lambda}{2\pi}\left[\log\left(\frac{8\times 0{,}33\lambda}{2\pi\, 0{,}0015\lambda}\right) - 1{,}75\right]$$

$$X_A = 569{,}6\ \Omega$$ (III)

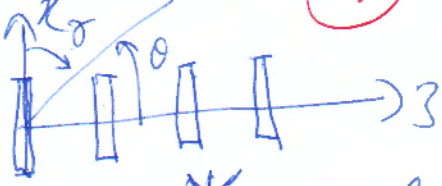
c) $$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi\times 3316^6 \times 4\times\pi\cdot 10^{-7}}{2\times 3{,}3\,10^7}} = 1{,}987\,10^{-3}\ \Omega$$

$$Rd = R_s\frac{\ell}{2\pi a} = R_s\frac{0{,}33\lambda}{2\pi\, 1{,}5\,10^{-3}\lambda} = 0{,}1391\ \Omega$$ (III)

d) $$\underline{Z}_A = (R^r + R_d) + jX_A = (2{,}482 + j\,569{,}6)\ \Omega$$ (II)

e) $$e = \frac{R^r}{R^r + R_d} = 0{,}9439 = 94{,}4\%$$ (II)

III 1°) $N = 4$, $d = \frac{\lambda}{4}$



$$E_n = E(\theta) \times FR_n \quad ; \quad FR_n = \frac{\sin N\frac{\Psi}{2}}{N\sin\frac{\Psi}{2}} \quad ; \quad \Psi = \beta d\cos\theta + \alpha$$ (I) (I) (I)

rayonnement transversal $\Rightarrow$ max rayonnement pour $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Psi = 0$ lorsque $\beta d\cos\frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha = 0$ (II)

$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ (II) donc $FR_n = \frac{\sin 4\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)}$ (II)

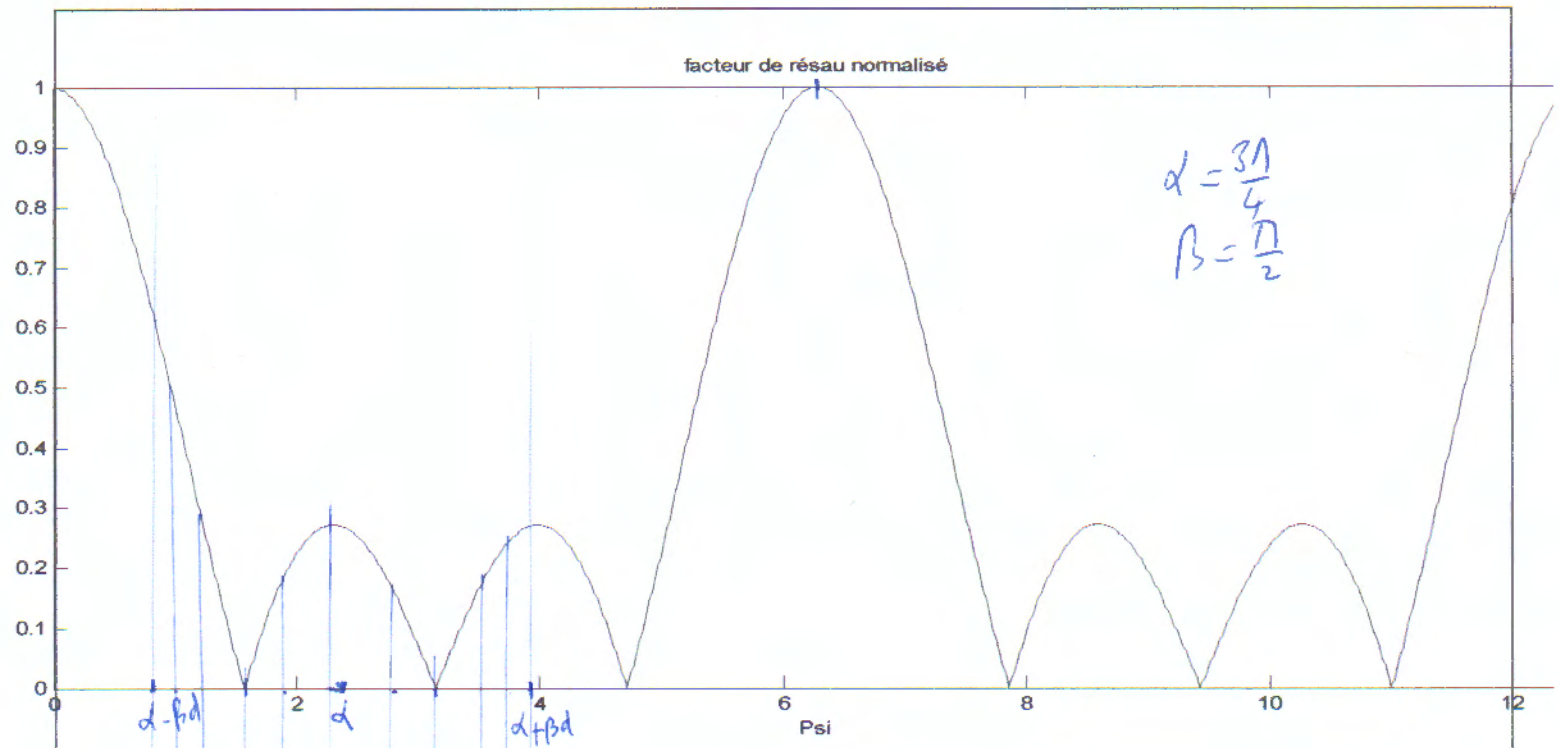
$$FR_n = \frac{\sin(\pi\cos\theta)}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)} \quad ; \quad E(\gamma) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right)}{\sin\gamma}$$ (II)

$\cos\gamma = \vec{i}\cdot\vec{u_r}$ (I) $\quad \vec{u_r} = \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{u_\rho} = \cos\theta\vec{k} + \sin\theta[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}]$

$\Rightarrow \cos\gamma = \sin\theta\cos\varphi$ (III) et $\sin\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi}$ (II)

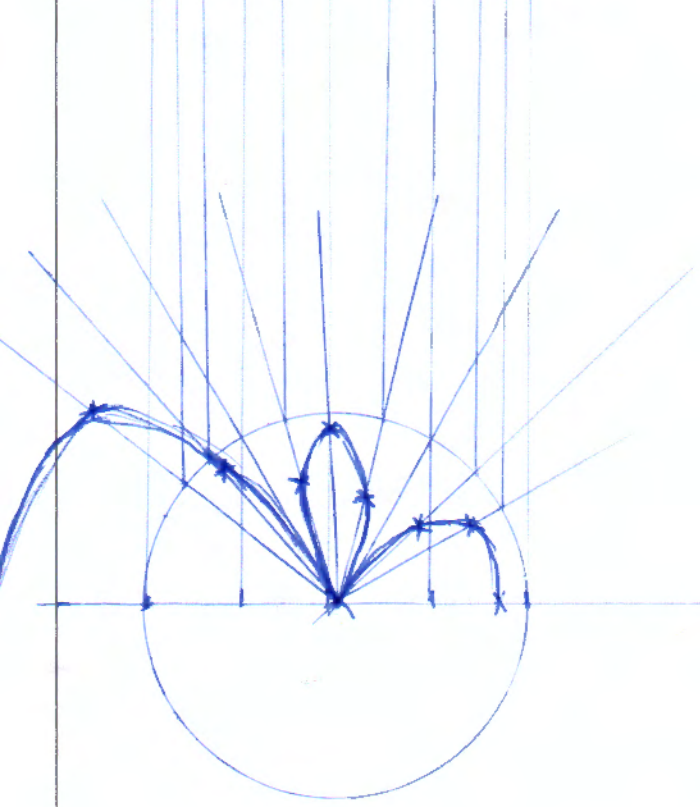
$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(\sin\theta\cos\varphi)\right]}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}} \times \frac{\sin(\pi\cos\theta)}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)}}$$ (II)

34



$\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$\beta = \frac{\pi}{2}$



α correct (III)

βd correct (III)

Si α et βd correct

Allure correcte (3 Blues) (III)

Tracé exacte (II)